XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Пусть *A* = 11…11 (1526 единиц). При каком наибольшем *n* не существует натурального числа *B*, кратного *A*, сумма цифр которого равна *n*? (Közepiskolai Matematikai Lapok, B. 4757)

**2.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**3.** Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник *ABCDE* (см. рис.). Оказалось, что углы *ABC*, *BCD* и *DEA* равны. Чему? (Л. Емельянов)

*C*

*B*

*A*

*D*

*E*

**4.** У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Какие числа может получить Петя такими операциями? (А. Антропов)

**5.** У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число *a* ≤ 1, а таракан проползает *a* см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана? (Аргентина, 2014)

**6.** В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди приехавших в лагерь? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**7.** Дан треугольник *ABC*, где ∠*A* = 70°, ∠*B* = 30° и ∠*C* = 80°. Точка *D* внутри треугольника такова, что ∠*DAB* = 30° и ∠*DBA* = 10°. Найдите угол *DCB*. (Фольклор)

**8.** Даны вещественные числа *a*1, *a*2, ..., *a*2016 и *b*1, *b*2, ..., *b*2016. Обозначим через *xn* число [*na*1+*b*1]+[*na*2+*b*2]+...+[*na*2016+*b*2016]. Нашлось такое число *d*, что для любого натурального *k* выполнено *xk*+1–*xk* = *d*. Докажите, что число *a*1+*a*2+...+*a*2016 — целое. Здесь через [*x*] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее *x*. (Фольклор)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Существует ли натуральное число *B*, кратное 11111, сумма цифр которого равна 36? (Közepiskolai Matematikai Lapok, B. 4757)

**2.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

*C*

*B*

*A*

*D*

*E*

**3.** Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник *ABCDE* (см. рис.). Оказалось, что углы *ABC*, *BCD* и *DEA* равны. Чему? (Л. Емельянов)

**4.** У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Может ли Петя получить дробь 3/5? (А. Антропов)

**5.** У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число *a* ≤ 1, а таракан проползает *a* см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана? (Аргентина, 2014)

**6.** В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди приехавших в лагерь? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**7.** Пусть *AM* — медиана треугольника *ABC*; *P* — основание перпендикуляра из точки *B* на биссектрису угла *BMA*; *Q* — основание перпендикуляра из точки *C* на биссектрису угла *CMA*. Отрезки *AM* и *PQ* пересекаются в точке *S*. Докажите, что *PS* = *QS*. (Форум artofproblemsolving.com)

**8.** Даны вещественные числа *a* и *b*. Нашлось такое число *d*, что для любого натурального *n* выполнено [*a*(*n*+1)+*b*]−[*an*+*b*] = *d*. Докажите, что число *a* — целое. Здесь через [*x*] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее *x*. (Фольклор)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Какую сумму цифр не может иметь натуральное число, кратное 11? Перечислите все варианты и объясните, почему других нет. (Фольклор)

**2.** Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов? (Минск, районная олимпиада, 2005)

*C*

*B*

*A*

*D*

*E*

**3.** Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник *ABCDE* (см. рис.). Оказалось, что углы *ABC*, *BCD* и *DEA* равны. Чему? (Л. Емельянов)

**4.** У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Может ли Петя получить дробь 5/7? (А. Антропов)

**5.** У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое натуральное число *a* ≤ 100, а таракан проползает *a* см вправо или влево. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 5 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 км от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана? (Аргентина, 2014, спрямление)

**6.** В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди первоклассников? (А.Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**7.** Пусть *AM* — медиана треугольника *ABC*; *P* — основание перпендикуляра из точки *B* на биссектрису угла *BMA*; *Q* — основание перпендикуляра из точки *C* на биссектрису угла *CMA*. Отрезки *AM* и *PQ* пересекаются в точке *S*. Докажите, что *PS* = *QS*. (Форум artofproblemsolving.com)

**8.** Найдите все такие вещественные числа *x*, что оба числа *x*+ и *x*2+ — рациональные. (Фольклор)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди приехавших в лагерь? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**2.** На плоскости проведено *n* прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения *n*. (По мотивам Белоруссия-2008)

**3.** У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Какие числа может получить Петя такими операциями? (А. Антропов)

**4.** Число *n* назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Могут ли для какого-то натурального *n* числа *n*, *n*+4 и *n*+8 быть хорошими? (С. Берлов по мотивам Postal coaching-2015)

**5.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**6.** 6 идущих подряд натуральных чисел каким-то образом разбивают на две тройки чисел. Затем считают произведения чисел в этих тройках и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и разбив их на тройки — (1, 5, 6) и (2, 3, 4), мы получим 30−24 = 6.) Какое наименьшее значение может принимать результат? (С. Берлов)

**7.** Положительные числа *a*, *b*, *c* и *d* удовлетворяют неравенствам *ab*(*c*+*d*) ≥ (*a*+*b*)*cd* и *ab*+*cd* ≥ (*a*+*b*)(*c*+*d*). Докажите, что *a*+*b* > *c*+*d*. (Dan Nedeianu, Recreatii matematice, 2013, I)

**8.** В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Точка *P* — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок *AM* из точки *B*. На отрезке *AM* выбрана такая точка *Q*, что *AQ* = 2*PM*. Докажите, что ∠*CQM* = ∠*BAM*. (Олимпиада Черновецкой области, 8 класс, 2014)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** В оздоровительном лагере отдыхают 225 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых шестерых школьников есть три непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди отдыхающих в лагере? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**2.** На плоскости проведено *n* прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения *n*. (По мотивам Белоруссия-2008)

**3.** У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5? (А. Антропов)

**4.** Число *n* назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Могут ли для какого-то натурального *n* числа *n*, *n*+4 и *n*+8 быть хорошими? (С. Берлов по мотивам Postal coaching-2015)

**5.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**6.** 6 идущих подряд натуральных чисел каким-то образом разбивают на две тройки чисел. Затем считают произведения чисел в этих тройках и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и разбив их на тройки — (1, 5, 6) и (2, 3, 4), мы получим 30−24 = 6.) Какое наименьшее значение может принимать результат? (С. Берлов)

**7.** Попарно различные положительные числа *a*, *b*, *c* и *d* удовлетворяют неравенствам *ab*(*c*+*d*) ≥ (*a*+*b*)*cd* и *ab*+*cd* ≥ (*a*+*b*)(*c*+*d*). Какое из чисел *ab* и 3*cd* больше? (Dan Nedeianu, Recreatii matematice, 2013, I, упрощение)

**8.** В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Точка *P* — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок *AM* из точки *B*. На отрезке *AM* выбрана такая точка *Q*, что *AQ* = 2*PM*. Докажите, что ∠*CQM* = ∠*BAM*. (Олимпиада Черновецкой области, 8 класс, 2014)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** В оздоровительном лагере отдыхают 225 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых шестерых школьников есть три непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди отдыхающих в лагере? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**2.** На плоскости проведено *n* прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения *n*. (По мотивам Белоруссия-2008)

**3.** У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5? (А. Антропов)

**4.** Число *n* назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что если числа *n* и *n*+1 — хорошие, то их произведение — удвоенный квадрат натурального числа. (С. Берлов по мотивам Postal coaching-2015)

**5.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**6.** 4 идущих подряд натуральных числа каким-то образом разбивают на две пары чисел. Затем считают произведения чисел в этих парах и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 5, 6, 7, 8 и разбив их на пары — (5, 6) и (7, 8), мы получим 56−30 = 26.) Какое наименьшее значение может принимать результат? Минимум берётся по всем четвёркам и всем разбиениям. (С. Берлов)

**7.** Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов? (Минск, районка-2005)

**8.** В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Точка *P* — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок *AM* из точки *B*. На отрезке *AM* выбрана такая точка *Q*, что *AQ* = 2*PM*. Докажите, что ∠*CQM* = ∠*BAM*. (Олимпиада Черновецкой области, 8 класс, 2014)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди пришедших? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**2.** Число *N* назовём *особым*, если на плоскости можно провести *N* прямых, каждая из которых пересекается ровно с 10 другими. Найдите 4 особых числа. (По мотивам Белоруссия-2008)

**3.** У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5? (А. Антропов)

**4.** Существует ли такое натуральное число, что все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами? (С. Берлов по мотивам Postal coaching-2015)

**5.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**6.** 4 идущих подряд натуральных числа каким-то образом разбивают на две пары чисел. Затем считают произведения чисел в этих парах и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 5, 6, 7, 8 и разбив их на пары — (5, 6) и (7, 8), мы получим 56−30 = 26.) Какое наименьшее значение может принимать результат? Минимум берётся по всем четвёркам и всем разбиениям. (С. Берлов)

**7.** Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов? (Минск, районка-2005)

**8.** Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование? (Минск, районка-2004)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование? (Минск районка-2004)

**2.** Даны 6 идущих подряд натуральных чисел. Их разбили на две тройки чисел, в каждой тройке числа перемножили и вычли из большего произведения меньшее. Какое наименьшее значение может принимать эта разность? Минимум берётся по всем шестёркам чисел и всем их разбиениям. (С. Берлов)

**3.** В первый класс пришли 30 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых восьмерых школьников есть четыре непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников может быть в классе? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**4.** Число *n* назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что если числа *n* и *n*+1 — хорошие, то их произведение — удвоенный квадрат натурального числа. (С. Берлов по мотивам Postal coaching-2015)

**5.** Петя написал на первой доске число 5, а на второй ⎯ число 8. За один ход оба написанных числа разрешается либо увеличить на 1, либо умножить на какое-нибудь натуральное число, либо разделить на какой-нибудь их натуральный общий делитель. Можно ли несколькими такими операциями добиться, чтобы на первой доске было написано число 3, а на второй ⎯ число 5? (А. Антропов)

**6.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** На плоскости проведено *n* различных прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения *n*. (По мотивам Белоруссия-2008)

**8.** Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов? (Минск, районка-2005)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование? (Минск, районка-2004)

**2.** Даны 6 идущих подряд натуральных чисел. Их разбили на две тройки чисел, в каждой тройке числа перемножили и вычли из большего произведения меньшее. Какое наименьшее значение может принимать эта разность? Минимум берётся по всем шестёркам чисел и всем их разбиениям. (С. Берлов)

**3.** В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырех школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников может быть в классе? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**4.** Натуральное число назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что число 100! не является хорошим. (100! — это произведение всех натуральных чисел от 1 до 100, взятых по одному разу.) (С. Берлов по мотивам Postal coaching-2015)

**5.** У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5? (А. Антропов)

**6.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** На плоскости проведено *n* различных прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения *n*. (По мотивам Белоруссия-2008)

**8.** Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов? (Минск, районка-2005)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование? (Минск, районка-2004)

**2.** Можно ли какие-нибудь 6 идущих подряд натуральных чисел разбить на две группы по 3 числа с равными произведениями? (С. Берлов)

**3.** В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые ⎯ нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди пришедших? (А. Храбров, Олимпиада СПбГУ, 2015)

**4.** Два узника сидят в двух одиночных камерах. Им устраивают испытание. Каждому в камеру приносят кота. Кот может быть чёрным или белым. Каждый пытается угадать, какого цвета кот у его товарища. Если хотя бы один из узников угадает, то их отпустят на свободу, иначе – казнят. Перед испытанием узники могут пообщаться и договориться о своих действиях. Могут ли они гарантированно освободиться? (Фольклор)

**5.** У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5? (А. Антропов)

**6.** Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно *a* черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 ⎯ ровно *b* черных клеток. При каких *a* и *b* это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2015)

**7.** Число *N* называется *особым*, если на плоскости можно провести *N* различных прямых, каждая из которых пересекается ровно с 10 другими. Найдите 4 особых числа. (По мотивам Белоруссия-2008)

**8.** Имеются 10 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов? (Минск, районка-2005)